

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$ được kí hiệu là

A. $\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b).$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(a) - F(b).$

C. $\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$

D. $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Câu 2. Tính $\int_{-1}^3 x^2 dx$ được kết quả là

A. $\frac{28}{3}.$

B. $\frac{26}{3}.$

C. $\frac{25}{3}.$

D. $\frac{29}{3}.$

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{3} [3^3 - (-1)^3] = \frac{28}{3}.$

Câu 3. Cho $I = \int_{-1}^3 |2x - 4| dx$. Chọn khẳng định đúng.

A. $I = \left| \int_{-1}^3 (2x - 4) dx \right|.$

B. $I = - \int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx.$

C. $I = \int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx.$

D. $I = \int_{-1}^2 (2x - 4) dx - \int_2^3 (2x - 4) dx.$

Lời giải

Ta thấy $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Vậy $I = \int_{-1}^3 |2x-4| dx = -\int_{-1}^2 (2x-4) dx + \int_2^3 (2x-4) dx.$

Câu 4. Tính $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{x} dx$ được kết quả là

A. $8 - \ln 3.$

B. $8 + 2 \ln 3.$

C. $8 + \ln 3.$

D. $7 + \ln 3.$

Lời giải

Ta có $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{x} dx = \int_1^3 \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(x^2 + \ln|x| \right) \Big|_1^3 = (3^2 + \ln 3) - 1^2 = 8 + \ln 3.$

Câu 5. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$ được kết quả là

A. $-1.$

B. $-\frac{1}{2}.$

C. $\frac{1}{2}.$

D. $1.$

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$

Câu 6. Kết quả phép tính $\int_1^2 3^x dx$ bằng

A. $\frac{2}{\ln 3}.$

B. $6.$

C. $\frac{-6}{\ln 3}.$

D. $\frac{6}{\ln 3}$

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_1^2 = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 3} = \frac{6}{\ln 3}$

Câu 7. Biết rằng $\int_1^3 f(t) dt = 4.$ Tính $\int_1^3 2f(x) dx$

A. $2.$

B. $6.$

C. $4.$

D. 8

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 4 \Rightarrow \int_1^3 2f(x) dx = 2 \cdot \int_1^3 f(x) dx = 8$

Câu 8. Biết rằng $\int_0^3 (2x+1)^2 dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + bx^2 + cx \right) \Big|_0^3$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$

A. 9.

B. 5.

C. 6.

D. 7

Lời giải

Ta có: $\int_0^3 (2x+1)^2 dx = \int_0^3 (4x^2 + 4x + 1) dx = \left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x \right) \Big|_0^3$. Do vậy $T = 4 + 2 + 1 = 7$

Câu 9. Biết $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx$. Tìm mệnh đề đúng

A. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-1}^2 (x+1) dx + \int_{-2}^{-1} (x+1) dx$. **B.** $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} (x+1) dx - \int_{-1}^2 (x+1) dx$.

C. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^2 (x+1) dx$. **D.** $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^2 (x+1) dx - \int_{-1}^2 (x+1) dx$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^2 |x+1| dx = \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_{-2}^{-1} (x+1) dx$

Câu 10. Kết quả phép tính $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 3}{x} dx$ bằng.

A. $I = 6 + 3\ln 2$.

B. $I = \frac{5}{2} - 3\ln 2$.

C. $I = \frac{3}{2} - 3\ln 2$.

D. $I = \frac{7}{2} + 3\ln 2$

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 3}{x} dx = \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{3}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2} + 3\ln 2$

Câu 11. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx$

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$.

B. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$.

C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$.

D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Lời giải

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx = \left(x^2 + \cos x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2\sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

A. $I = 1.$

B. $I = \frac{\pi}{2}.$

C. $I = -1.$

D. $I = -\pi.$

Lời giải

Từ giả thiết $f(x) + x(f'(x) - 2\sin x) = x^2 \cos x$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

Mặt khác: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x.$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

Phân 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

a) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

b) $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$

c) Nếu $a < c < b$ và $\int_a^b f(x) dx = m, \int_c^a f(x) dx = n$ thì $\int_c^b f(x) dx = m - n.$

d) $\int_a^b [2024 f(x) + 2025] dx = 2024 \int_a^b f(x) dx + 2025(a - b).$

Lời giải

a) Đúng.

Ta có: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

b) Đúng.

Ta có: $\int_b^a f(x) dx = F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x) dx.$

c) Sai.

$$\text{Với } a < c < b \text{ ta có } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx.$$

$$\text{Mặt khác } \int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx = -n.$$

$$\text{Từ đó ta được } \int_c^b f(x)dx = m - (-n) = m + n.$$

d) Sai.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_a^b [2024f(x) + 2025]dx &= 2024 \int_a^b f(x)dx + 2025 \int_a^b dx = 2024 \int_a^b f(x)dx + 2025x \Big|_a^b \\ &= 2024 \int_a^b f(x)dx + 2025(b-a). \end{aligned}$$

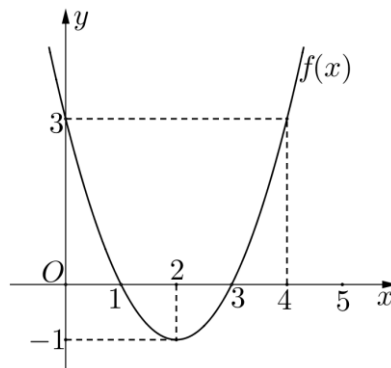
Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

a) $\int_1^2 x^2 = \frac{7}{3}.$

b) Nếu m là tham số, tích phân $\int_0^2 (4x^3 + m)dx = 4$ thì $m = -4.$

c) Cho biết m, n, p là các số thực. Tích phân $\int_1^2 (\pi x^5 + ex^2 + 1)dx = m\pi + ne + p.$ Giá trị của $2m - 3n + p$ bằng 15.

d) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Tích phân $\int_0^1 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$ bằng 10.

Lời giải

a) Đúng.

$$\text{Ta có: } \int_1^2 x^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

b) Sai.

Với m là tham số, ta có $\int_0^2 (4x^3 + m) dx = (x^4 + mx) \Big|_0^2 = 16 + 2m$.

Mà $\int_0^2 (4x^3 + m) dx = 4$ nên $16 + 2m = 4 \Leftrightarrow m = -6$.

c) Đúng.

Ta có: $\int_1^2 (\pi x^5 + ex^2 + 1) dx = \left(\frac{\pi x^6}{6} + \frac{ex^3}{3} + x \right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{2^6 - 1^6}{6} \right) + e \left(\frac{2^3 - 1^3}{3} \right) + 2 - 1 = \frac{21\pi}{2} + \frac{7e}{3} + 1$.

Mà $\int_1^2 (\pi x^5 + ex^2 + 1) dx = m\pi + ne + p$ nên $m = \frac{21}{2}$, $n = \frac{7}{3}$, $p = 1 \Rightarrow 2m - 3n + p = 21 - 7 + 1 = 15$.

d) Sai.

Ta có: hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc hai nên $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy đồ thị đi qua các điểm $(0; 3)$, $(2; -1)$, $(1; 0)$, $(3; 0)$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} c = 3 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ta có: $\int_0^1 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^5 (x^2 - 4x + 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^5 = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$.

Câu 3: Cho parabol $(P): y = 4x^2 - 14$.

- a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , Ox và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ bằng $\frac{38}{3}$.
- b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $\Delta: y = 2025$ và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $\Delta: y = 2025$ và 2 đường thẳng $x = -1$, $x = 0$.
- c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) và Ox xấp xỉ bằng 38.
- d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) và Ox gấp 3 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , Ox và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

- a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , Ox và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ được xác định bởi công thức: $S = \int_0^1 (-4x^2 + 14) dx = \frac{38}{3}$.

Vậy khẳng định **a)** là đúng.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $\Delta: y = 2025$ và 2 đường thẳng

$$x = 0, x = 1 \text{ được xác định bởi công thức: } S = \int_0^1 |4x^2 - 14 - 2025| dx = \frac{6113}{3}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $\Delta: y = 2025$ và 2 đường thẳng

$$x = 0, x = -1 \text{ được xác định bởi công thức: } S = \int_{-1}^0 |4x^2 - 14 - 2025| dx = \frac{6113}{3}$$

Vậy khẳng định **b)** là đúng.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của Ox và đồ thị $(P): 4x^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{14}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{14}}{2} \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) và Ox được xác định bởi công thức:

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{14}}{2}}^{\frac{\sqrt{14}}{2}} |4x^2 - 14| dx \approx 34,9.$$

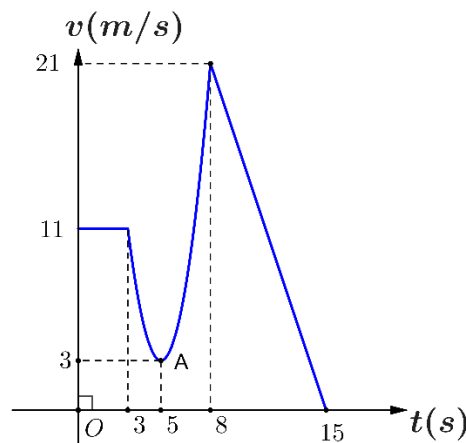
Vậy khẳng định **c)** là sai.

d) Do đồ thị (P) đối xứng qua Oy nên ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) và Ox gấp 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , Ox và 2 đường thẳng

$$x = 0, x = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Vậy khẳng định **d)** là sai.

Câu 4: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng khi $0 \leq t \leq 3(s)$ và $8 \leq t \leq 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8(s)$ (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 15$ là $v(15) = 21(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11dt \text{ (m)}$

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $73,5(m)$.

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb} < 7 \text{ (m/s)}$.

Lời giải

a) Sai (Dựa vào đồ thị $v(t)$).

b) Đúng

Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của chuyển động là $v(t) = 11(m/s)$.

Do đó quãng đường chất điểm chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11dt \text{ (m)}$

c) Đúng

Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8; 21)$ và $(15; 0)$. Ta có: $v(t) = at + b$.

Từ giả thiết ta có hệ:
$$\begin{cases} 8a + b = 21 \\ 15a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 45 \end{cases}.$$

Do đó $v(t) = -3t + 45 \text{ (} 8 \leq t \leq 15 \text{)}$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_2 = \int_8^{15} (-3t + 45) dt = -\frac{3t^2}{2} \Big|_8^{15} + 45t \Big|_8^{15} = \frac{147}{2} = 73,5(m).$$

d) Sai

Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua $(3; 11), (5; 3), (8; 21)$ có phương trình dạng: $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 11 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 \\ c = 53 \end{cases}$$

Do đó: $v(t) = 2t^2 - 20t + 53 \text{ (} 3 \leq t \leq 8 \text{)}$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3 = \int_3^8 v(t) dt = \int_3^8 (2t^2 - 20t + 53) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 53t \right) \Big|_3^8 = \frac{115}{3} \text{ (m)}$$

Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian này là:

$$v_{tb} = \frac{S_3}{5} = \frac{23}{3} \approx 7,67 (m/s).$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Giá trị của $\int_0^2 (x^2 + 2x - 3) dx$ là

Lời giải

$$\int_0^2 (x^2 + 2x - 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

Câu 2: Tính tích phân sau: $\int_0^2 |2x - 3| dx$.

Lời giải

$$\int_0^2 |2x - 3| dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x - 3) dx = \left(3x - x^2 \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(x^2 - 3x \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

Câu 3: Cho tích phân $\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) dx = \ln a + \frac{b}{c}$, biết a, b, c là số nguyên. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải

$$\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \ln 2 + \frac{3}{2} = \ln a + \frac{b}{c} \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 7.$$

Câu 4: Biết tích phân $\int_0^{\ln 2\sqrt{2}} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} dx = \ln(\sqrt{a} + b)$, với a, b là số nguyên dương. Tính tích $a \cdot b$.

Lời giải

Đặt $u = e^x$ ta có $x = 0 \Rightarrow u = 1; x = \ln 2\sqrt{2} \Rightarrow u = 2\sqrt{2}; du = e^x dx$

$$\text{Ta có } \int_0^{\ln 2\sqrt{2}} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} dx = \int_1^{2\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$\text{Đặt } t = u + \sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) du \Rightarrow dt = \frac{u + \sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{u^2 + 1}} du \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

Đổi cận $u = 1 \Rightarrow t = 1 + \sqrt{2}; u = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\int_1^{2\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int_{1+\sqrt{2}}^{3+2\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{1+\sqrt{2}}^{3+2\sqrt{2}} = \ln(1 + \sqrt{2})$$

Ta có $a = 2, b = 1 \Rightarrow a \cdot b = 2$

Câu 5: Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 10 \sin t$ (m/s²). Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 5 m/s. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

Lời giải

Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = \int a(t) dt = \int 10 \sin t dt = -10 \cos t + C$.

Khi vật bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc là 5 m/s nên ta có $v(0) = 5 \Leftrightarrow -10 \cos 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 15$.

Do đó $v(t) = -10 \cos t + 15$.

Ta có $-1 \leq \cos t \leq 1, \forall t \in [0; \pi]$

$$\Leftrightarrow 10 \geq -10 \cos t \geq -10, \forall t \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow 25 \geq -10 \cos t + 15 \geq 5, \forall t \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow 25 \geq v(t) \geq 5, \forall t \in [0; \pi]$$

Vậy vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất là 25 m/s khi $t = \pi$.

Khi đó, gia tốc của vật tại thời điểm $t = \pi$ là $a(\pi) = 10 \sin \pi = 0$ (m/s).

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4 \sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Kết quả của tích phân $I = \int_0^{\pi} 8 f(x) dx$ được cho dưới dạng $a\pi^2$. Tìm giá trị của a .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin^8 x - \cos^8 x - 4 \sin^6 x &= (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4 \sin^6 x \\ &= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4 \sin^6 x \\ &= \cos^4 x \cdot \sin^2 x - \sin^4 x \cdot \cos^2 x - \cos^6 x - 3 \sin^6 x \\ &= \cos^4 x \cdot \sin^2 x - \sin^4 x \cdot \cos^2 x - 2 \sin^6 x - (\cos^6 x + \sin^6 x) \\ &= \sin^2 x (\cos^4 x - \sin^4 x) - \sin^4 x (\cos^2 x + \sin^2 x) - (1 - 3 \cos^2 x \cdot \sin^2 x) \\ &= 4 \cos^2 x \cdot \sin^2 x - 2 \sin^4 x - 1 \\ &= -\frac{3}{4} \cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{3}{4} \cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4} \right) dx = -\frac{3}{16} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{5}{4} x + C$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \text{ nên } -\frac{3}{16} \sin 4 \cdot 0 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 0 - \frac{5}{4} \cdot 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x.$$

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\pi} 8f(x)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} 8\left(-\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x\right)dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{2}\sin 4x + 4\sin 2x - 10x\right)dx \\ &= \left(\frac{3}{8}\cos 4x - 2\cos 2x - 5x^2\right)\bigg|_0^{\pi} = -5\pi^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = -5.$$

♦ **Đề 2:**

 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[c; d]$ và số thực k . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $\int_c^d [f(x) + g(x)]dx = \int_c^d f(x)dx + \int_c^d g(x)dx.$

B. $\int_c^d [f(x) - g(x)]dx = \int_c^d f(x)dx - \int_c^d g(x)dx.$

C. $\int_c^d [f(x).g(x)]dx = \int_c^d f(x)dx.\int_c^d g(x)dx.$

D. $\int_c^d kf(x)dx = k\int_c^d f(x)dx.$

Lời giải

Theo lý thuyết tính chất của tích phân nên đáp án C là sai.

Câu 2: Tính tích phân $\int_0^1 (2024x + 2025)dx.$

A. 4049.

B. -3037.

C. 3037.

D. -4049.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2024x + 2025) dx &= \int_0^1 2024x dx + \int_0^1 2025 dx \\ &= \left(\frac{2024x^2}{2} + 2025x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2024 \cdot 1^2}{2} + 2025 \cdot 1 \right) - \left(\frac{2024 \cdot 0^2}{2} + 2025 \cdot 0 \right) \\ &= 3037\end{aligned}$$

Chọn đáp án C.

Câu 3: Tính tích phân $\int_0^8 |x^2 - 6x| dx$.

A. $\frac{152}{3}$. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** $\frac{-64}{3}$. **D.** $\frac{-152}{3}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^8 |x^2 - 6x| dx &= \int_0^6 |x^2 - 6x| dx + \int_6^8 |x^2 - 6x| dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx + \int_6^8 (x^2 - 6x) dx \\ &= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_0^6 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_6^8 = \frac{152}{3}\end{aligned}$$

Chọn đáp án A.

Câu 4: Tính tích phân $\int_0^6 \frac{2x+6}{x+2} dx$.

A. $8 - 2\ln 4$. **B.** $12 + 4\ln 4$. **C.** $10 + 2\ln 6$. **D.** $12 + 2\ln 4$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^6 \frac{2x+6}{x+2} dx = \int_0^6 \left(2 + \frac{2}{x+2} \right) dx = \left(2x + 2\ln|x+2| \right) \Big|_0^6 = 12 + 2\ln 8 - 2\ln 2 = 12 + 2\ln 4$$

Chọn đáp án D.

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x) dx$.

A. -1 . **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** 5 .

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x dx \\ &= \left(-2\cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(3\sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 - (-2) = 5\end{aligned}$$

Chọn đáp án D.

Câu 6: Tính tích phân $\int_0^1 2^x \cdot 3^x dx$.

A. $\frac{6}{\ln 6}$.

B. $\frac{7}{\ln 6}$.

C. $\frac{5}{\ln 6}$.

D. $\frac{8}{\ln 18}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^1 2^x \cdot 3^x dx = \int_0^1 6^x dx = \left. \frac{6^x}{\ln 6} \right|_0^1 = \frac{6^1}{\ln 6} - \frac{6^0}{\ln 6} = \frac{5}{\ln 6}.$$

Câu 7: Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[c; d]$ và số thực k . Cho các khẳng định sau:

1) $\int_c^d f(x) dx$ là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = c, x = d$.

2) $\int_d^d f(x) dx = 1$.

3) $\int_c^d f(x) dx = -\int_d^c f(x) dx$.

Số khẳng định **đúng** là.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Khẳng định 1 sai vì $\int_c^d f(x) dx$ là diện tích của hình thang cong với $y = f(x)$ là hàm số “không âm”.

Khẳng định 2 sai. Vì $\int_d^d f(x) dx = 0$.

Khẳng định 3 đúng (theo lý thuyết của tích phân).

Câu 8: Tính tích phân $\int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$.

A. $\frac{206}{15}$.

B. $\frac{260}{15}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. $\frac{34}{3}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx = \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2 \right) - 0 = \frac{206}{15}$$

Câu 9: Tính tích phân $\int_1^9 \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$.

A. 45.

B. 43.

C. 42.

D. 44.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_1^9 \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^9 = \left(\frac{9^2}{2} + 2 \cdot 9 \right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) = 44$$

Câu 10: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{x+1} dx$.

A. $\frac{14}{3} + \ln \frac{3}{2}$.

B. $\frac{14}{3} + \ln \frac{3}{4}$.

C. $11 + \ln \frac{3}{4}$.

D. $11 + 2 \ln \frac{3}{4}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{x+1} dx = \int_1^2 \left(2x^2 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{16}{3} + \ln 3 \right) - \left(\frac{2}{3} + \ln 2 \right) = \frac{14}{3} + \ln \frac{3}{2}$$

Câu 11: Tính tích phân $\int_0^\pi \cos^2 x dx$.

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. π .

D. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Câu 12: Một ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 27 - 9\sqrt{t}$. Tính quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. 120m.

B. 18m.

C. 81m.

D. 54m.

Lời giải

Thời điểm vật dừng lại là $v = 0 \Leftrightarrow 27 - 9\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t = 9(s)$

Quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại là:

$$s(t) = \int_0^9 (27 - 9\sqrt{t}) dt = \left(27t - 6t\sqrt{t} \right) \Big|_0^9 = 81(m).$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ và hàm số $g(x) = x^2 + x$. Xét tính **đúng - sai** của các mệnh đề sau?

a) Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai

đường thẳng $x = 1, x = 3$ được tính bằng công thức $S = \int_1^3 (x^3 + 2x) dx$

b) Gọi $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $S = F(3) - F(1)$.

c) $I = 10 \int_1^3 f(x) dx + 6 \int_1^3 g(x) dx = 356$.

d) $J = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx$.

Lời giải

a) Đúng: Vì hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ liên tục và không âm trên đoạn $[1; 3]$ nên theo ý nghĩa

hình học của tích phân thì $S = \int_1^3 (x^3 + 2x) dx$

b) Sai: Vì $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

Đáp án đúng thì $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$

c) Đúng:

$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(3) = \frac{117}{4}$; $F(1) = \frac{5}{4}$

nên $\int_1^3 f(x) dx = \frac{117}{4} - \frac{5}{4} = 28$. Suy ra $10 \int_1^3 f(x) dx = 280$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$, $G(3) = \frac{27}{2}$; $G(1) = \frac{5}{6}$

nên $\int_1^3 g(x) dx = \frac{27}{2} - \frac{5}{6} = \frac{38}{3}$. Suy ra $6 \int_1^3 g(x) dx = 76$

Vậy $I = 10 \int_1^3 f(x) dx + 6 \int_1^3 g(x) dx = 280 + 76 = 356$

d) Đúng: Theo tính chất của tích phân

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + x + 1$ Xét tính **đúng - sai** của các mệnh đề sau?

a) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3 - x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^4 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1$

b) $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$

c) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx.$

d) $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{9}.$

Lời giải

a) **Sai:** Vì Sai cận trên và cận dưới

b) **Đúng:**

c) **Sai:** Sai dấu

Sửa lại $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3) dx + \int_0^1 (-x^2 + x + 1) dx$

d) **Sai:**

Vì $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ nên $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 9|$ với $0 \leq x \leq 9$. Trong mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

a) $f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} -x^2 + 9, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 9, & 3 \leq x \leq 9 \end{cases}.$

b) $\int_0^9 f(x) dx = -\int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx.$

c) $\int_0^9 f(x) dx = -\int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx.$

d) $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^m (x^2 - 9) dx + \int_m^9 (x^2 - 9) dx \quad \forall m \in (0, 9).$

Lời giải

a	B	c	d
Đ	S	Đ	S

x	0	3	9
$x^2 - 9$		-	0 +

a) **Đúng** vì từ bảng xét dấu ta thấy: $x^2 - 9 \leq 0, \forall x \in [0, 3]$ và $x^2 - 9 \geq 0, \forall x \in [3, 9]$

b) **Sai** vì $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx.$

c) **Đúng** vì theo bảng xét dấu ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^9 |x^2 - 9| dx &= \int_0^3 |x^2 - 9| dx + \int_3^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^3 [-(x^2 - 9)] dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx \\ &= -\int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx\end{aligned}$$

d) Sai.

Thế $m=1$ vào đẳng thức $\int_0^9 f(x) dx = \int_0^m (x^2 - 9) dx + \int_m^9 (x^2 - 9) dx$ ta được

$$\int_0^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^1 (x^2 - 9) dx + \int_1^9 (x^2 - 9) dx \quad (1).$$

Ta có:
$$\begin{cases} VP(1) = 162 \\ VT(1) = 198 \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$. Trong mỗi ý a) b) c) d) thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

a) $f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right)$.

b) $\int_3^4 f(x) dx > \frac{1}{2}$

c) $\int_3^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \ln \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$. Ta có: $a.b = 15$.

d) $\int_3^4 \left[f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} + 7$.

Lời giải

a) Sai

Ta có $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$

b) Sai

$$\int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(\ln(x-2) - \ln(x+2) \right) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2} \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$$

.

Ta có $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} < 0,5$.

c) Đúng

Theo câu b ta có

$$\int_3^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln(x-2) - \ln(x+2)) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

Do đó ta có $a = 5; b = 3$. Vậy $a.b = 15$.

d) Sai

$$\text{Ta có } \int_3^4 \left[f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \int_3^4 f(x) dx + \int_3^4 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx.$$

$$\text{Với } \int_3^4 f(x) dx = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

$$\int_3^4 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} \Big|_3^4 = -12 + 5 = -7.$$

$$\text{Vậy } \int_3^4 \left[f(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} - 7.$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

Trả lời: -133

Lời giải

$$\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx = 4 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 3x^2 dx = -8 - x^3 \Big|_0^5 = -8 - 125 = -133.$$

Câu 2: Cho $0 \leq m \leq 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x-2| dx = 2$. Tìm m bằng

Trả lời: 2

Lời giải

$$\text{Do : } x \in [0; m] \Rightarrow x-2 \leq x-m \leq 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^m (2-x) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^m = 2m - \frac{m^2}{2} = 2 \Rightarrow m = 2$$

Câu 3: Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$

Trả lời: 7

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln |x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7.$$

Câu 4: Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{4e^a} - \frac{b}{e} + \frac{7}{4}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$ bằng

Lời giải

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4e^4} - \frac{2}{e} + \frac{7}{4}$$

$$\text{Do đó } a = 4, b = 2 \Rightarrow P = 4 + 2 = 6.$$

Câu 5: Biết rằng $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos x - 2 \sin x}{\sin x + 3 \cos x} dx = \frac{a\pi}{2} + b \ln 2 - c \ln 3$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $P = abc$.

Lời giải

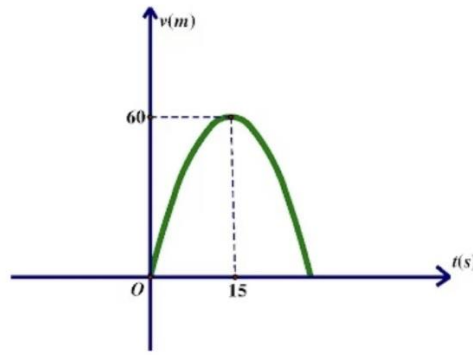
Trả lời: $\frac{3}{4}$.

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos x - 2 \sin x}{\sin x + 3 \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + 3 \cos x + \cos x - 3 \sin x}{\sin x + 3 \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{(\sin x + 3 \cos x)'}{\sin x + 3 \cos x} \right) dx$$

$$= x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln(\sin x + 3 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln(2\sqrt{2}) - \ln 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \ln 2 - \ln 3.$$

$$\text{Từ đây ta có } a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 1 \text{ nên } P = \frac{3}{4}.$$

Câu 6: Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường Parabol như hình vẽ. Biết rằng sau 15s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất $60m/s$ và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



Lời giải

Trả lời: 600.

Hàm số vận tốc có đồ thị là đường Parabol $v(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$), theo hình vẽ ta thấy đỉnh của Parabol là $I(15; 60)$, đồng thời đi qua gốc $O(0; 0)$, suy ra:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 15 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 30a + b = 0 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 0 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{15} \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{15}t^2 + 8t.$$

Theo đồ thị xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 15s$ nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$\int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(-\frac{4}{15}t^2 + 8t \right) dt = \left(-\frac{4}{45}t^3 + 4t^2 \right) \Big|_0^{15} = 600m.$$

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc vận tốc đạt cao nhất thì xe đi được quãng đường dài 600 m.

•Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ thì $\int_1^4 \left[\frac{1}{3} f(x) - 5 \right] dx$ bằng

A. -15.

B. -12.

C. -14.

D. -4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^4 \left[\frac{1}{3} f(x) - 5 \right] dx = \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 5 dx = 1 - 15 = -14.$$

Câu 2: Biết $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_1^3 g(x) dx = -7$. Giá trị của $\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

A. -29.

B. -31.

C. 1.

D. 29.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_1^3 f(x) dx - 2 \int_1^3 g(x) dx = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-7) = 29.$$

Câu 3: Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 f(x) dx$ bằng:

A. 8.

B. 10.

C. 9.

D. $\frac{26}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x) dx = F(x) \Big|_1^3 = x^2 \Big|_1^3 = 9 - 1 = 8.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^5 f(x) dx = 10$, $\int_3^5 f(x) dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. 11.

B. 9.

C. 10.

D. -9.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx = 10 - 1 = 9.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^5 f(x) dx = 10$, $\int_3^5 f(x) dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. 9.

B. -9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Ta có

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \Rightarrow 10 = \int_1^3 f(x) dx + 1 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 9.$$

Câu 6: Nếu $\int_0^3 [4f(x) + 3x^2] dx = 7$ thì $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. -8.

C. -5.

D. 3.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^3 [4f(x) + 3x^2] dx = 7 &\Leftrightarrow \int_0^3 4f(x) dx + \int_0^3 3x^2 dx = 7 \\ &\Leftrightarrow 4 \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 3x^2 dx = 7 \Leftrightarrow 4 \int_0^3 f(x) dx + 27 = 7 \Leftrightarrow 4 \int_0^3 f(x) dx = -20 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx = -5 \end{aligned}$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a).$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

C. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

D. $\int f(x)dx = f(b) - f(a).$

Lời giải

Ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ và $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P = 7$.

B. $P = -4$.

C. $P = 4$.

D. $P = 10$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{10} f(x)dx = 7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = 7$
 $\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = 7 - 3 = 4$. Vậy $P = 4$.

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$.

B. $25m$.

C. $50m$.

D. $16m$.

Lời giải

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S = 3.10 + \int_0^5 (-2t + 10)dt = 30 + 25 = 55m$.

Câu 10: Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên R và $\int_0^6 f(x)dx = 4$, $\int_2^6 f(x)dx = -3$. Khi đó

$\int_0^2 [f(v) - 3]dv$ bằng.

A. 1 .

B. 3 .

C. 4 .

D. 2 .

Lời giải

$$4 = \int_0^6 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - 3$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 7$$

$$\int_0^2 [f(v) - 3] dv = \int_0^2 f(v) dv - 3 \int_0^2 dv = \int_0^2 f(x) dx - 6 = 1.$$

Câu 11: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -3$.

B. $S = 5$.

C. $S = 9$.

D. $S = 11$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{Khi } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{Khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx.$$

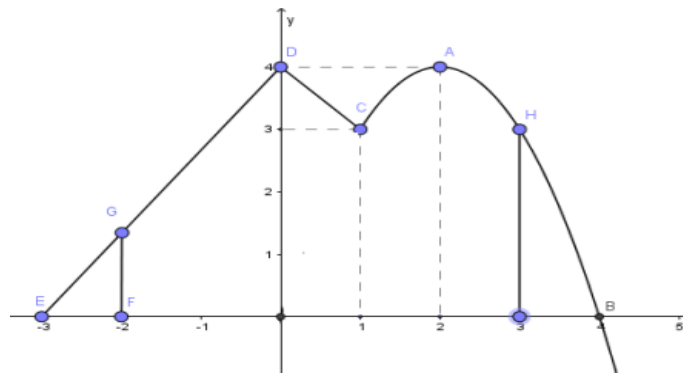
$$= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx.$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2 \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx.$$

$$= (5 \ln x - 2x) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln x) \Big|_2^5.$$

$$= 4 + 8 \ln 2 - 3 \ln 5.$$

Câu 12: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$ như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tính $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$.



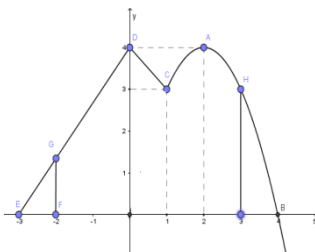
A. $I = \frac{53}{3}$.

B. $I = \frac{97}{6}$.

C. $I = \frac{43}{2}$.

D. $I = \frac{95}{6}$.

Lời giải



Ta có $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ_1 , Δ_2 , Parabol (P) , $x = -2$, $x = 3$.

Với Δ_1 qua $E(-3; 0)$, $D(0; 4)$ nên có pt: $y = \frac{4}{3}x + 4$; Δ_2 qua $D(0; 4)$, $C(1; 3)$ nên có phương trình: $y = -x + 4$; $(P): y = ax^2 + bx + c$ qua $C(1; 3)$ và có đỉnh $A(2; 4)$ nên

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{4}{3}x + 4 \right) dx + \int_0^1 (-x + 4) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x) dx = \frac{97}{6}.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho parabol $(P): y = x^2$.

- a)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , Ox và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ bằng 1.
- b)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $\Delta: y = 2x$ và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ bằng 3.
- c)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $d: y = 3x - 2$ bằng 4.
- d)** Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là $\frac{4}{3}$.

Lời giải

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , Ox và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ được xác định bởi công thức: $S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Vậy khẳng định **a)** là sai.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $\Delta: y = 2x$ và 2 đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ được xác định bởi công thức: $S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \frac{4}{3}$.

Vậy khẳng định **b)** là sai.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (P) :

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) , đường thẳng $d: y = 3x - 2$ được xác định bởi

$$\text{công thức: } S = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{1}{6}.$$

Vậy khẳng định **c)** là sai.

d) Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2 - ax - b = 0$

$$\text{Để có 2 điểm } A, B \text{ thì } a^2 + 4b > 0. \text{ khi đó: } \begin{cases} A(x_1; ax_1 + b) \\ B(x_2; ax_2 + b) \\ x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = -b \end{cases}$$

$$\text{Nên } AB = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + 1)} |x_2 - x_1| = 2$$

$$\text{Giả sử } x_2 > x_1 \text{ ta có } |x_2 - x_1| = \frac{2}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \leq 2$$

$$\text{Mặt khác: } |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$\text{Khi đó } S = \int_{x_1}^{x_2} ax + b - x^2 dx = \frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2}(x_2 + x_1) + b - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) \right]$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2} \cdot a + b - \frac{1}{3}(a^2 + b) \right] = (x_2 - x_1) \left[\frac{a^2}{2} + \frac{2b}{3} \right] = \frac{a^2 + 4b}{6} (x_2 - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \leq \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

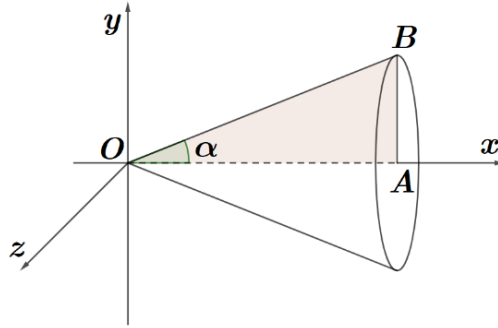
.

$$\text{Suy ra: } S_{\max} = \frac{4}{3} \text{ khi } \begin{cases} a = 0 \\ x_2 - x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn vì } (P) \text{ có tính đối xứng)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ B(-1;1) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(-1;1) \\ B(1;1) \end{cases}.$$

Vậy khẳng định **d)** là đúng.

Câu 2: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và $AOB = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox .



- a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ thì $OB = x$.
- b) Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).
- c) Khi thể tích V của khối β là $\frac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos \alpha < \frac{1}{2}$.
- d) Khi $\tan \alpha = \cot \alpha$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

a) Đ	b) Đ	c) Đ	d) Đ
------	------	------	------

a) Đúng.

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{4}$ nên $OB: y = \tan \frac{\pi}{4} x = x$.

b) Đúng.

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{6}$ nên $OB: y = \tan \frac{\pi}{6} x = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi \int_0^a \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 dx = \pi \int_0^a \frac{x^2}{3} dx = \frac{\pi x^3}{9} \Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Đúng.

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y = \tan \alpha \cdot x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi \int_0^a (\tan \alpha \cdot x)^2 dx = \frac{\pi \tan^2 \alpha \cdot x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi \tan^2 \alpha \cdot a^3}{3}$ (đvtt).

Do $V = \frac{4\pi a^3}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi \tan^2 \alpha \cdot a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1 = 5 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

d) Đúng.

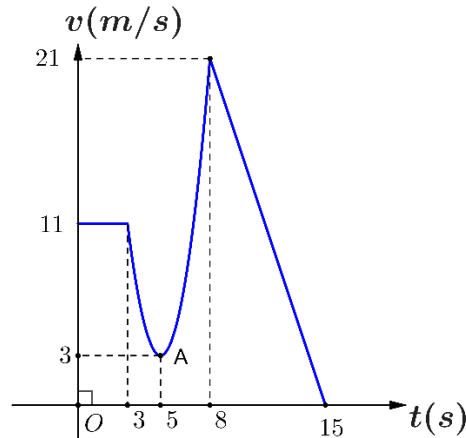
Ta có: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y = \tan \alpha \cdot x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi \int_0^a (\tan \alpha \cdot x)^2 dx = \frac{\pi \tan^2 \alpha \cdot x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi \tan^2 \alpha \cdot a^3}{3}$ (đvtt).

Do $\tan \alpha = \cot \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = \cot \alpha \cdot \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm 1$.

Mặt khác $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\tan \alpha = 1 \Rightarrow V = \frac{\pi \tan^2 \alpha \cdot a^3}{3} = \frac{\pi \cdot a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 3: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường thẳng khi $0 \leq t \leq 3$ (s) và $8 \leq t \leq 15$ (s) và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8$ (s) (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ là $v(3) = 11$ (m/s).

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11 dt$ (m)

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng 73,5 (m).

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb} < 7$ (m/s)

Lời giải

a) Đúng (Dựa vào đồ thị $v(t)$).

b) Đúng

Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của chuyển động là $v(t) = 11$ (m/s).

Do đó quãng đường chất điểm chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11 dt$ (m)

c) Đúng

Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8; 21)$ và $(15; 0)$. Ta có: $v(t) = at + b$.

Từ giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} 8a + b = 21 \\ 15a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 45 \end{cases}.$

Do đó $v(t) = -3t + 45 \quad (8 \leq t \leq 15).$

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_2 = \int_8^{15} (-3t + 45) dt = -\frac{3t^2}{2} \Big|_8^{15} + 45t \Big|_8^{15} = \frac{147}{2} = 73,5(m).$$

c) Sai

Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua $(3;11), (5;3), (8;21)$ có phương trình dạng: $v(t) = at^2 + bt + c.$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} 9a + 3b + c = 11 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 \\ c = 53 \end{cases}$

Do đó: $v(t) = 2t^2 - 20t + 53 \quad (3 \leq t \leq 8).$

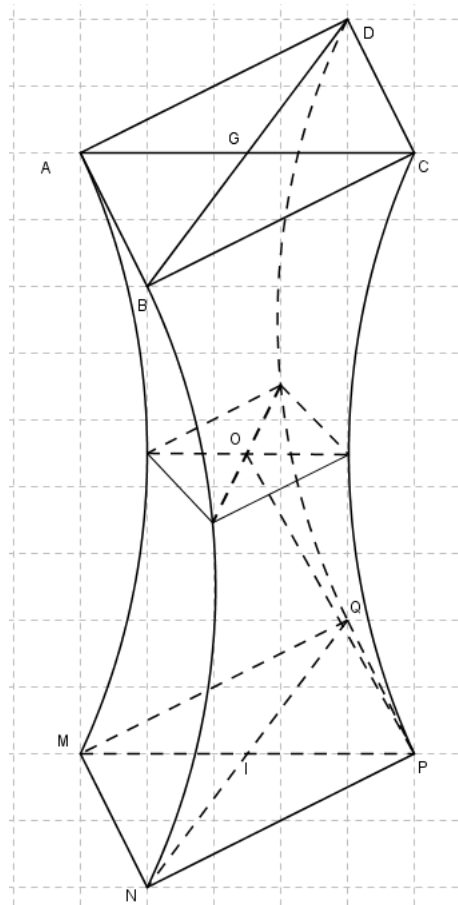
Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3 = \int_3^8 v(t) dt = \int_3^8 (2t^2 - 20t + 53) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 53t \right) \Big|_3^8 = \frac{115}{3} \quad (m)$$

Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian này là:

$$v_{tb} = \frac{S_3}{5} = \frac{23}{3} \approx 7,67(m/s).$$

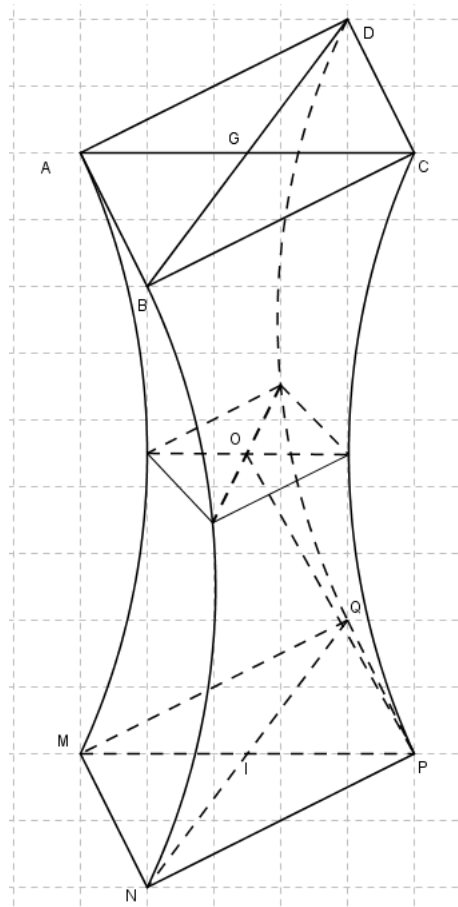
Câu 4: Một tòa nhà có kiến cấu như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao tòa nhà là 48 (m). Cắt ngôi nhà bởi một mặt phẳng song song với mặt đất thì được thiết diện là các hình vuông. Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó và đi qua đường chéo hình vuông hai đáy ta được thiết diện là một hình đối xứng $ACPM$ (AM, CP là hai cung tròn). Gọi O là tâm thiết diện hình vuông chính giữa tòa nhà như hình vẽ, OP là tiếp tuyến của cung tròn CP . Biết $OP = 30(m)$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



- a) Diện tích đáy tòa nhà $S_{ABCD} = 1000(m^2)$.
- b) Diện tích thiết diện hình vuông chính giữa (nhận O là tâm) bằng $200(m^2)$.
- c) Diện tích thiết diện $ACPM$ bằng $1200(m^2)$.
- d) Thể tích tòa nhà là $31295(m^3)$.

Lời giải

a) **CHỌN SAI**

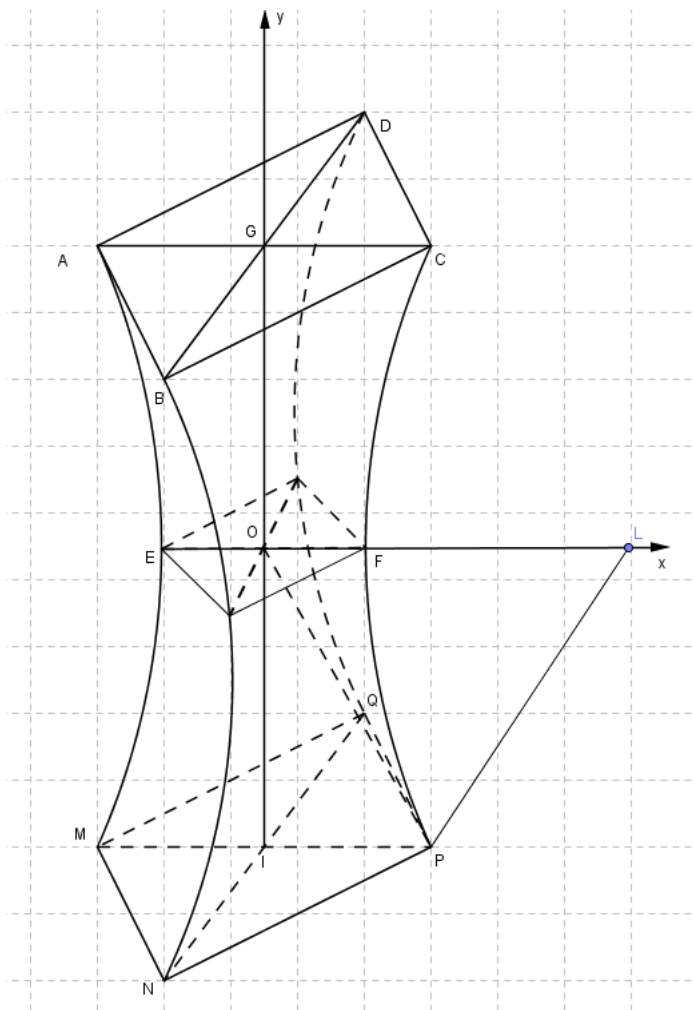


+) Chiều cao tòa nhà là $48m \Rightarrow OI = 24m \Rightarrow IP = \sqrt{OP^2 - OI^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$

+) $PQ = 18\sqrt{2} = AB \Rightarrow S_{ABCD} = 648m^2$

b) CHỌN ĐÚNG

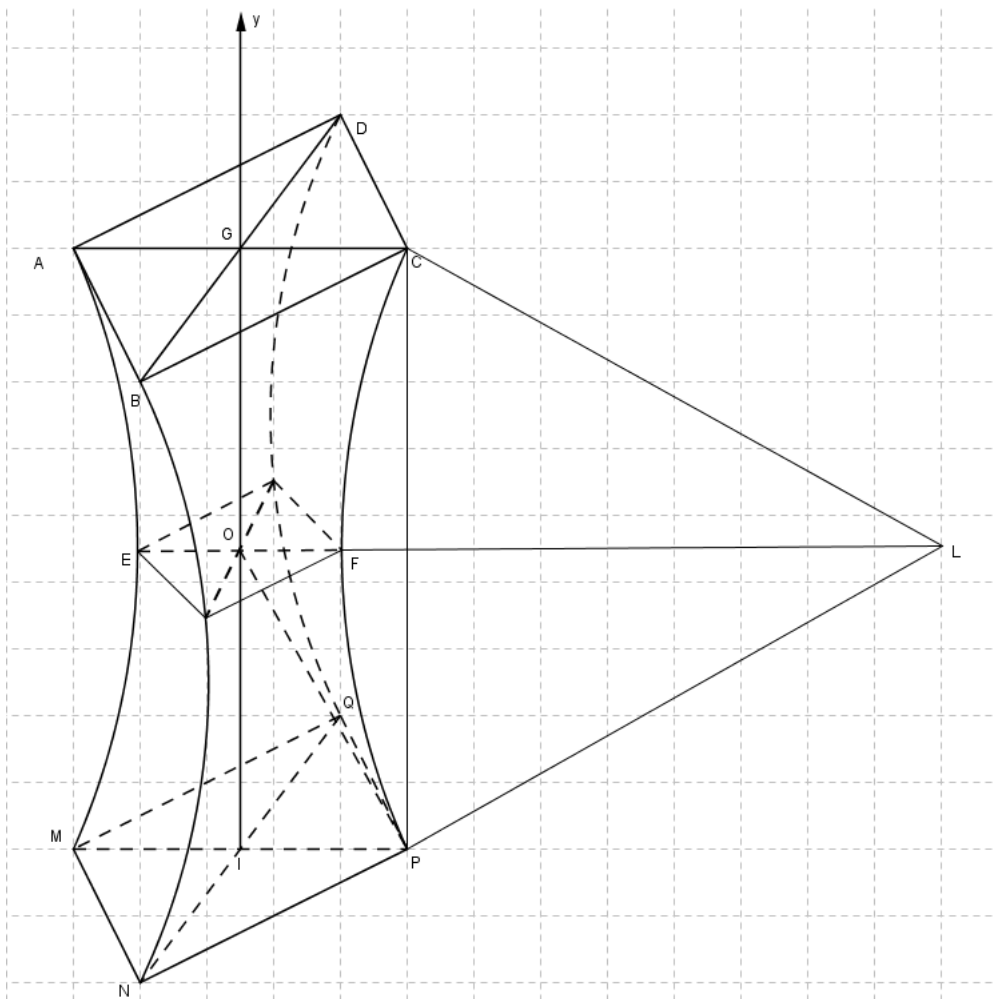
Gọi L là tâm cung tròn như hình vẽ.



+)Ta tính được

$$LP = 40 \Rightarrow LO = 50 \Rightarrow OF = 10 \Rightarrow S_{td} = 200(m^2)$$

c)**CHỌN ĐÚNG.**



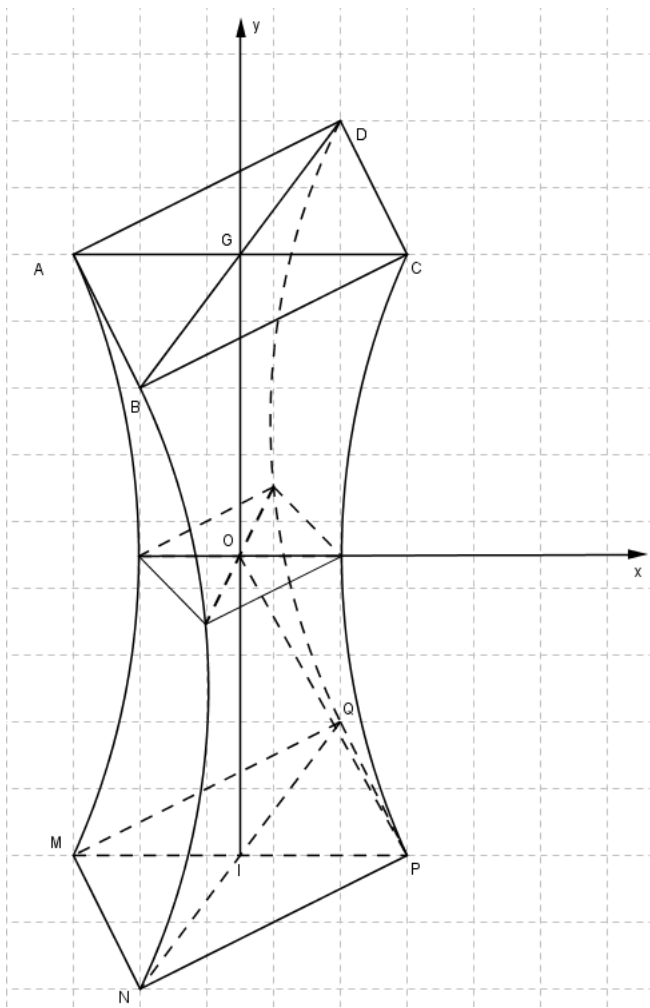
Ta có $S_{LCP} = 768$ và $\cos CLP = \frac{40^2 + 40^2 - 48^2}{2 \cdot 40 \cdot 40} = \frac{7}{25} \Rightarrow CLP \approx 1,29(rad)$.

+) Diện tích quạt tròn $LCFP$ là $S_{LCFP} = \frac{1,29 \cdot 40^2}{2} = 1032(m^2)$

+) Diện tích tam giác cong CFP là $S_{CFP} = 1032 - 768 = 264(m^2)$
 $\Rightarrow S_{ACPM} = 2(S_{GCPI} - S_{CFP}) = 2(48 \cdot 18 - 264) = 1200(m^2)$

d) **CHỌN ĐÚNG.**

Chọn hệ trục như hình vẽ.



+) Phương trình đường tròn $(L; 40)$ là $(x-50)^2 + y^2 = 1600 \Rightarrow x = 50 - \sqrt{1600 - y^2}$.

+) Độ dài đường chéo thiết diện phẳng cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Oy là

$$2\left(50 - \sqrt{1600 - y^2}\right)$$

Suy ra $\Rightarrow S(y) = \left(2\left(50 - \sqrt{1600 - y^2}\right)\right)^2$

+) Vậy thể tích ngôi nhà là $V = 2 \int_0^{24} S(y) dy = 2 \int_0^{24} \left(2\left(50 - \sqrt{1600 - y^2}\right)\right)^2 dy = 31295 \text{ (m}^3\text{)}.$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Biết $\int_0^1 x(1-x^2)^{2024} dx = \frac{1}{2m}$, với m là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 2025

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{2024} dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{2024} d(1-x^2) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{2025}}{2025} \Big|_0^1 = \frac{1}{2 \cdot 2025}$$

$$\Rightarrow m = 2025.$$

Câu 2: Tổng các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = x + m$ cắt parabol $(P): y = x^2 - 5x + 4$ tại hai điểm phân biệt và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) bằng $\frac{4}{3}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: -4

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$x^2 - 5x + 4 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 - m = 0, (1)$$

d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 4 + m = m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -5$

Theo Viét: $x_1 + x_2 = 6; x_1 x_2 = 4 - m$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \int_{x_1}^{x_2} (m - x^2 + 6x - 4) dx = \left((m - 4)x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \left((m - 4) + 3(x_1 + x_2) - \frac{1}{3}[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] \right) (x_2 - x_1) = \frac{4}{3} \sqrt{(m + 5)^3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = -4 \end{aligned}$$

Vậy $S = -4$.

Câu 3: Cho phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = \sqrt{7}$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq \sqrt{7}$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $2x$ và $\sqrt{x^2 + 1}$. Thể tích của phần vật thể đã cho bằng $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ (c là số nguyên tố, $b < 6; a, b, c \in \mathbf{N}$). Tính $a.b.c$?

Lời giải

Đáp số: 84

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.

Thể tích phần vật thể đã cho là: $V = \int_1^{\sqrt{7}} 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow t dt = x dx$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 2\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow V = \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

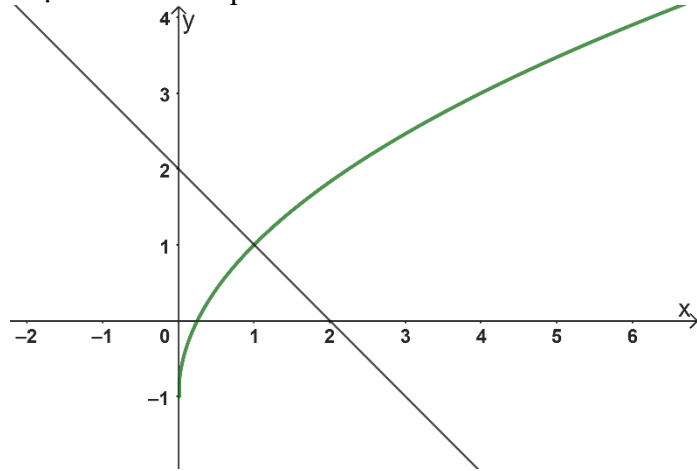
Vậy $a = 14; b = 2; c = 3$ nên $a.b.c = 84$.

Câu 4: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0; y = 2\sqrt{x} - 1; y = 0$ quay quanh trục Ox bằng $\frac{a\pi}{b}$ ($a, b \in \mathbf{N}, \frac{a}{b}$ tối giản). Tính $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 13

Hình phẳng đã cho được chia làm 2 phần sau:



Xét phương trình hoành độ giao điểm chung:

$$2\sqrt{x} - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = 1.$$

$$2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2\sqrt{x} - 1$; $y = 0$; $x = \frac{1}{4}$; $x = 1$.

Khi quay trục Ox phần 1 ta được khối tròn xoay có thể tích

$$V_1 = \pi \int_{1/4}^1 (2\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \cdot (4x - 4\sqrt{x} + 1) \Big|_{1/4}^1 = \frac{7\pi}{24}.$$

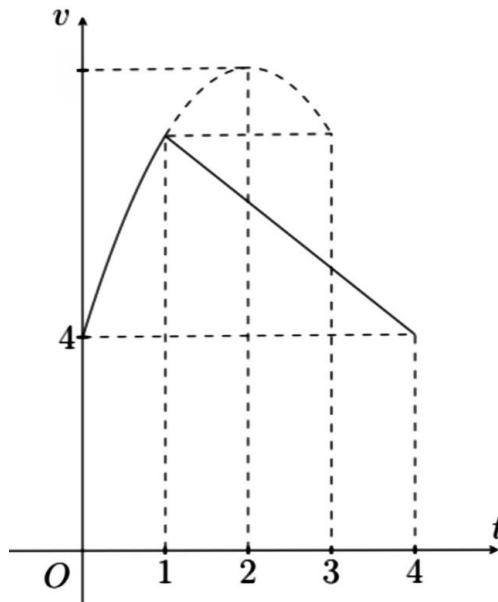
Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Khi quay trục Ox phần 2 ta được khối tròn xoay có thể tích

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2 - x)^2 dx = \pi \cdot \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{8}$.

Câu 5: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc . . phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;10)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Đáp số: 25,3km

Trong khoảng 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t) = at^2 + bt + c (a \neq 0)$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 10 \\ x_1 = -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 10 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases}$$

Khi đó: $v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t + 4$.

$$\Rightarrow v(1) = \frac{17}{2}; v(4) = 4.$$

Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t) = mx + n$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v(1) = m + n = \frac{17}{2} \\ v(4) = 4m + n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ n = 10 \end{cases}$$

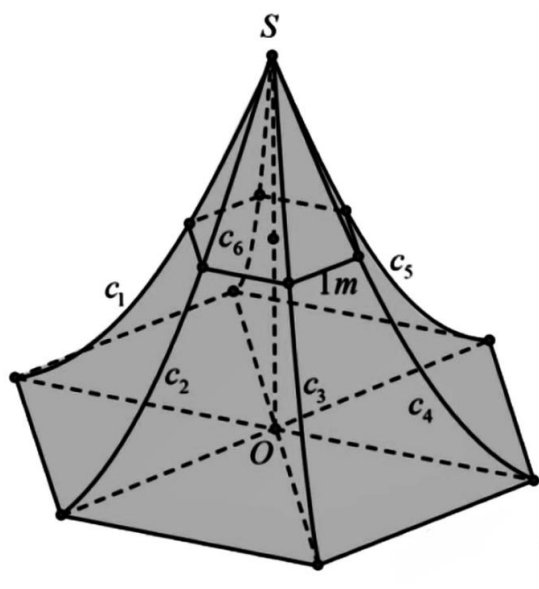
$$\Rightarrow v(t) = -\frac{3}{2}t + 10.$$

Quãng đường vật đi trong 4 giờ:

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 4\right) dt + \int_1^4 \left(-\frac{3}{2}t + 10\right) dt = 25,3 \text{ km}.$$

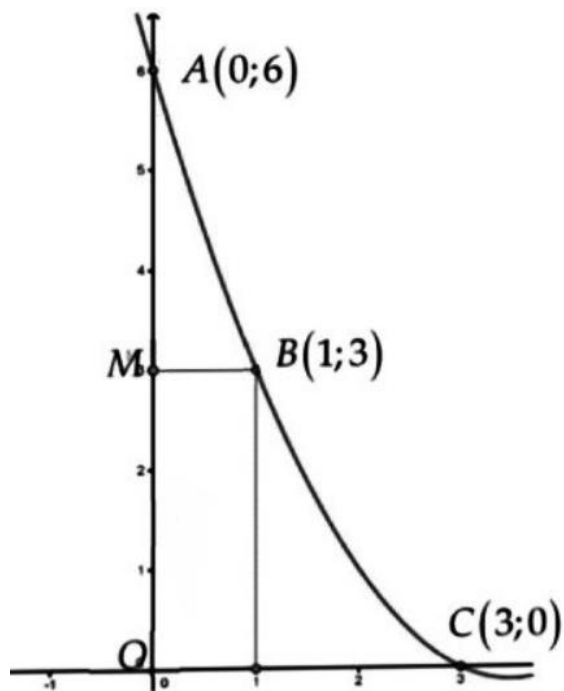
Câu 6: Gia đình ông An xây một cái chòi hình lục giác, trong đó mái chòi (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” có trần bằng gỗ như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều có đường chéo chính là 6m. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây thép $c_1; c_2; c_3; c_4; c_5; c_6; c_7; c_8$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (α) vuông

góc với SO là một lục giác đều và khi (α) khi qua trung điểm của SO thì bát giác đều có cạnh $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi (H) đó.



Lời giải

Đáp số: $29,2m^3$



Đặt tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo hình vẽ ta có bán kính của bát giác là BM .

$$\text{Suy ra: } 2y = x^2 - 7x + 12 \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 2y + \frac{1}{4} \Rightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| = \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$$

$$\text{Mà } x \in [0; 3] \Rightarrow \frac{7}{2} - x = \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$$

$$\text{Nếu ta đặt } t = OM \text{ thì } BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$$

Khi đó diện tích của thiết diện thiết diện lục giác:

$$S(t) = 6 \cdot \frac{BM^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2 \text{ với } t \in [0; 6]$$

Vậy thể tích của mái chòi theo đề bài là:

$$V = \int_0^6 S(t) dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2 dt = 29,2 m^3$$